福井大学
工学部　研究報告
第46巻　第2号
1998年9月

ナップザック問題への適用における遺伝的アルゴリズムの特徴の分析

馬　炫*　謝　孟春**　西野 順二***
小高 知宏***　小倉 久和***

An Analysis of Characteristics of the Genetic Algorithm Applied to the Knapsack Problems

Xuan MA, Mengchun XIE, Junji NISHINO,
Tomohiro ODAKA and Hisakazu OGURA

(Received Aug. 29, 1998)

In this paper, we have studied the characteristics of the Genetic Algorithm (GA) which is applied to the various types of knapsack problems including non-linear types. With contrasting the optimal solutions obtained by GA with the exact solution obtained by other searching method for small size of problem, we discussed the searching ability of GA in various spaces of potential solution of knapsack problem. In order to show the convergence of solutions easily, we divided individuals of population into three parts, i. e., upper part, middle part and lower part according to the fitness value, and use the distances of individuals in upper and lower part of population. By examining and analysing the behaviors of population and elite gene, we analysed the characteristics of GA from the view of diversity and uniformity of population.

Key Words: Optimization Problem, Genetic Algorithm, Knapsack Problem

1　はじめに

組合せ最適化問題では，離散変数の有限個の組合せの中から最適解を見出すことになるので，理論的には有限の手数で厳密解を得ることができる。しかし，現実のさまざまな組合せ最適化問題に対して厳密解を求めるための典型的な方法である分枝限定法や動的計画法などは，問題の規模が大きくなると組合せの数が飛躍的に増大するため，厳密解を求めることは実際上不可能になることが指摘されている。このような問題に対処するための現実的な妥協策として，高度な近似アルゴリズムによる準最適解の効率的な導出への要求が高まっている。遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm, GA) は最適化，適応，

*大学院工学研究科システム設計工学専攻
**福井工業高等専門学校電子情報工学科
***情報工学科

学習のための方法論として注目され，さまざまな応用がなされている。GA の一つの典型的な応用は最適化への応用，特に組合せ最適化問題への応用である。

ナップザック問題は，組合せ最適化問題の典型例である。ナップザック問題には，単純ナップザック問題(Simple Knapsack Problem，SKP)，マルチナップザック問題(Multiple Knapsack Problem，MKP)，多重選択ナップザック問題(Multiple-Choice Knapsack Problem，MCKP)，相互作用を有する非線形ナップザック問題(Non-linear Knapsack Problem，NKP)などがある。

離散組合せ最適化問題のナップザック問題は，SKP，MKP，MCKP，およびNKPからなる。ナップザック問題の応用はいろいろな分野へできるが，そのため，より離散組合せ最適化問題のナップザック問題における最適解を求める工夫が探されている。例えば，MCKP では従来次のような解法が知られている [1]。

(1) 分枝限定法と動的計画法を組合せた方法

(2) 深さ優先探索を利用した線形緩和問題の解法

(3) モジュラ法

方法 (1) と (2) の問題点は問題によって極めて大きな作業領域と計算時間を必要とすることである。この欠点を改善するために，(3) は幅優先探索の利点を効果的に利用すると共に，統合すべきモジュールの選定方法を工夫して，計算時間および必要とする記憶容量の改善を行なっている。

ナップザック問題では，問題の規模が大きい場合には，厳密解を求める計算時間が問題になる。各ナップザック問題は，問題の規模が小さい場合は他の方法で厳密解を求めることが容易にできる。しかし，問題の規模が大きくなると最適解を求めるのは困難になる。例えば，マルチナップザック問題は，ナップザック数あるいは品物数が増加すると組合せの数が飛躍的に増大するため，解空間が大きくなり，全数探索で厳密解を求めることは実際的には不可能である。

本研究では，さまざまなナップザック問題を GA を用いて解く場合の，GA の特徴を解析した。GA は最適化手法として優れた性質を有するため，多くの応用分野で用いられている。しかし，GA は応用分野毎に異なる挙動を示す可能性がある。さまざまなナップザック問題において，問題の種類が異なる場合や問題の構成が異なる場合には，問題の解空間が異なってくる。そこで，問題の種類や規模が異なる場合に，GA の探索能力がどのように変化するか，また探索の特性がどう変わるかを調べる必要がある。本研究では，ナップザック問題を対象とし，GA の探索能力を調べるために，問題の種類や規模に依存した特徴を分析する。そのために，問題の規模が小さい場合については GA の探索した最適解と厳密解を比較し，規模の大きい問題に対しては探索過程の解を最適解と比較する。また，エリートの挙動と解の収束などを考察する。GA は厳密解を求める方法ではなく，最適解を得る方法である。それぞれ解を比較することを通して，GA の探索能力について検討する。GA 探索の大域性と局所解の収束性は集団個体の多様性と一様性に関係する。どのように多様性と一様性の評価をするのかは研究の課題である。上位 1/3 と下位 1/3 の集団個体で集団個体の距離総和の評価指標を用いて GA の収束特性を分析する。

2 ナップザック問題と GA の構成

2.1 ナップザック問題の定式化

本研究では，対象のナップザック問題として SKP，MKP，MCKP，および，それぞれを非線形化した NSKP，NMKP，NMCKP の 6 種類を扱った。

(1) 単純ナップザック問題 (SKP)

単純ナップザック問題は，n 個の品物からいくつか選んで 1 つのナップザックに詰め込むとき，詰め込んだ品物の重量 Wがナップザックの制限重量 W_L以下であるという制限のもとで，詰め込んだ品物の価値の和 Cが最大になるような品物の組合せを選択するという問題である。この問題は組合せ最適化問題の例である。SKP は次のように定式化される。

j番目の品物の重量を w_j，価値を c_jとする。j番目の品物の状態を表わす変数 x_jは，それがナップザックに詰め込まれたとき 1 となり，詰め込まれなかったときは 0 となる。

$$W = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \tag{1}$$

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2}$$

として，

$$W \leq W_L \tag{3}$$

の条件下で，Cを最大にするx_jの組合せを求める。

(2) マルチナップザック問題 (MKP)

これは，SKP においてナップザックの数を複数としてK個としたものである。MKP は次のように定式化される。

ナップザックkの制限重量はW_{Lk}，ナップザックkにおけるj番目の品物の状態を表わす変数をx_{kj}として，それがナップザックkに詰め込まれたとき1となり，詰め込まれなかったときは0となる。

$$W_k = \sum_{j=1}^{n} w_j x_{kj}, (k = 1, \cdots, K) \tag{4}$$

$$C = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} c_j x_{kj} \tag{5}$$

として，

$$\sum_{k=1}^{K} x_{kj} \leq 1, (j = 1, \cdots, n) \tag{6}$$

$$W_k \leq W_{Lk}, (k = 1, \cdots, K) \tag{7}$$

の条件下で，Cを最大にするx_{kj}の組合せを求める。

(3) マルチクラスナップザック問題 (MCKP)

MCKP は，SKP において，品物をm個のクラスに分けて各クラスには複数個の品物があり，各クラスから一つの品物をとりだして1つのナップザックに詰める。このMCKP は次のように定式化される。

k番目のクラスの品物の数を$N(k)$とする。k番目のクラスのj番目の品物の重量をw_{kj}，価値をc_{kj}とし，その品物の状態を表わす変数x_{kj}は，それがナップザックに詰め込まれたとき1となり，詰め込まれなかったときは0となる。

$$W = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j \in N(k)} w_{kj} x_{kj} \tag{8}$$

$$C = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j \in N(k)} c_{kj} x_{kj} \tag{9}$$

として，

$$\sum_{j \in N(k)} x_{kj} = 1 \quad (k = 1, \cdots, m) \tag{10}$$

$$W \leq W_L \tag{11}$$

の条件下で, Cを最大にするx_{kj}の組合せを求める。

(4) 非線形ナップザック問題

非線形ナップザック問題にはさまざまなものがあるが，ここでは相互作用を有する品物からなる非線形ナップザック問題とする。上記のSKP とMKP，MCKP における各品物の価値が一緒に詰め込まれる品物との関係で決まる問題である。SKP，MKP，MCKP に対応してNSKP，NMKP，NMCKP と呼ぶことにする。制約条件などはすべて対応する線形ナップザック問題と同じであるが，価値の和は次のように定義されることになる。

$$NSKP \quad C=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j \tag{12}$$

$$NMKP \quad C=\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}c_jx_{kj}+\sum_{k=1}^{K}\sum_{1\le j_1\ne j_2\le n}\alpha_{j_1j_2}x_{kj_1}x_{kj_2} \tag{13}$$

$$NMCKP \quad C=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j\in N(k)}c_{kj}x_{kj}+\sum_{1\le k_1\ne k_2\le m}\sum_{j_1\in N(k_1)}\sum_{j_2\in N(k_2)}\alpha_{k_1k_2j_1j_2}x_{k_1j_1}x_{k_2j_2} \tag{14}$$

ここで，αは品物間の相互作用の大きさを表わす係数である。

2.2 GA の基本構成と設定

GA の一般的な手順は，初期化，交叉，突然変異，選択の 4 つからなる。初期化は，ランダムに複数の個体を生成し，初期世代集団とする。交叉は，設定された交叉確率や交叉方法により交叉を行い，新しい個体を生成する。突然変異は，設定された突然変異や突然変異の方法により突然変異を行い，新しい個体を生成する。選択は，各個体の環境に対する適応度を計算して，適応度に依存した一定の規則で個体を選ぶ。終了条件を満たせば，そのときに得られている最良の個体を問題の最適解とする。

本研究の GA の基本的な構成は次のようである。個体の表現としては，異なる問題に対して 2 値 $\{0,1\}$ の記号列と多値 $\{0,1,2,\cdots,n\}$ の記号列を用いる。遺伝操作は，一様交叉，一定確率の突然変異を用いて，ルーレット選択法とエリート保存戦略を使用する。メイティングは, 個体群の中からルーレット選択法で選び, 異なる個体とする。集団の多様性のために，交叉により生成された新しい個体をもとの個体群に入れる。その増殖した個体群を突然変異する。その後、初期集団サイズと同じの個体をルーレット選択法で選ぶ。反転の突然変異法と選択突然変異法を用いる。選択突然変異は, 多値記号列に対して遺伝子座の値を $\{0,1,2,\cdots,n\}$ からランダムに選んで決める方法である。評価関数は問題の目標関数と同様にする。終了条件はあらかじめ設定した世代交代の回数を超えたときである。

(1) SKP に対する設定

個体の表現

個体の遺伝子表現は，n 個の $x_j, j=1,\cdots n$ の並び $x=x_1x_2\cdots x_n$で表わす。n 個の品物を対象とし，遺伝子座を品物の番号に対応させ，ナップサックにその品物を詰めるかどうかで，対応する遺伝子座の値は 0 または 1 を割り振ることになる。例えば，$n=10$ で，1,4,5,8 番目の品物が選択された解候補を表す遺伝子型は 1001100100 である。それに対応する表現型は 1458 で,1,4,5,8 番目の品物がナップザックに入れられる。

突然変異は, 反転突然変異法とするから, 遺伝子座が 0 ならば 1 と, 1 ならば 0 とすることになる。

評価関数

評価関数 $fitness(x)$ は次のように設定する。

$$fitness(x)=\begin{cases} C & \text{if } W\le W_L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2) MKP に対する設定

個体の表現

MKP における個体の遺伝子表現は次のように設定する。ナップザックは K個あり，K_i番目のナップザックの状態を 0-1 変数 x_{K_ij}, $j=1,\cdots,n$ の n ビットの並びとする。個体の遺伝子 x は，それを $i=1,\cdots,K$の順に一列に並べたものとする。したがって，遺伝子のビット長は $K*n$ になる。

$$例：x=\underbrace{\boxed{1\,|\,0\,|\,1\,|\,0\,|\,0}}_{K_1}\underbrace{\boxed{0\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,1}}_{K_2}\underbrace{\boxed{0\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,|\,0}}_{K_3}$$

この例は，K=3 個のナップザック，n=5 個の品物で，1 番目と 3 番目の品物を 1 番目のナップザックに，2 番目と 5 番目を 2 番目のナップザックに，4 番目を 3 番目のナップザックに入れていることを表わしている。

突然変異は, SKP と同様, 反転突然変異法による。

評価関数

評価関数は，次のように設定する。

$$fitness(x) = \begin{cases} C & \text{if } W_k \leq W_L \text{ for all } k = 1 \sim K \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(3) MCKP に対する設定

個体の表現

遺伝子の長さはクラスの個数 m で, k番目の遺伝子座はk番目の, 選んで詰られた品物の番号を表す。従って, 多値表現の遺伝子である。例えば, 5 個のクラス, 各クラス 10 個の品物の場合, たとえば遺伝子 (25694) で, 1 文字目の 2 は 1 番目のクラスから 2 番目の品物が選択され，$x_{12} = 1, x_{11} = x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$ を表す。2 文字目の 5 は 2 番目のクラスから 5 番目の品物が選択され，$x_{25} = 1, x_{21} = x_{22} = x_{23} = x_{24} = 0$ を表す。以下同様に, 3 文字目の 6 は 3 番目のクラスから 6 番目の品物が, $\cdots$, ということを表す。

突然変異は, 選択突然変異法を用いる。

評価関数

評価関数は，次のように設定する。

$$fitness(x) = \begin{cases} C & \text{if } W \leq W_L \\ 0 & \text{otherise} \end{cases}$$

(4) 非線形ナップザック問題に対する設定

個体の表現

個体の表現は NSKP，NMKP，NMCKP において，それぞれ SKP，MKP，MCKP と同様にする。

評価関数

評価関数は，次のように設定する。

$$NSKP \qquad fitness(x) = \begin{cases} C & \text{if } W \leq W_L \\ 0 & \text{otherise} \end{cases} \tag{15}$$

$$NMKP \qquad fitness(x) = \begin{cases} C & \text{if } W_k \leq W_L \text{ for all } k = 1 \sim K \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{16}$$

$$NMCKP \qquad fitness(x) = \begin{cases} C & \text{if } W \leq W_L \\ 0 & \text{otherise} \end{cases} \tag{17}$$

3 遺伝的アルゴリズムの適用の実験と分析

3.1 各問題の具体的な設定

(1) SKP 問題の設定

SKP については，問題の種類は，n=10, 20, 30, 50, 100 の 5 種類とする。品物の価値と重量はランダムに乱数を発生し，制限重量は全部の品物の重量の 1/2 とする。集団個体数は 20，突然変異率 0.03，打ち切り世代は 200 世代である。それぞれ 10 回ずつの試行を行なった。

(2) MKP 問題の設定

MKP については，問題の種類は，K=3，K=5 に対して，それぞれ n=20, 30, 50 の品物とする。品物の価値 $\in [1, 100]$, と重量 $\in [1, 40]$ はランダムに乱数を発生し，各ナップザックの制限重量は，あらか

じめ設定して, $W_{L1}=80$, $W_{L2}=60$, $W_{L3}=70$, $W_{L4}=50$, $W_{L5}=90$ とした。集団個体数は 20, 突然変異率 0.01, 打ち切り世代は 200 世代である。10 回ずつの試行を行なった。

(3)MCKP 問題の設定

MCKP については, 問題の種類は, m=5 に対して, n=10,20,30,50,100 とする。各ナップザック中の品物の価値と重量, 制限重量は次の 2 つの規則にしたがって生成した。

1. $c_{kj}>0, w_{kj}>0$ となる整数をそれぞれ [0,200],[0,1000] の乱数を発生させて決定する。
2. W_L は $W_L=\sum_k[min_{j\in N(k)}w_{kj}+mam_{j\in N(k)}w_{kj}]/2$ とした。

集団個体数は 20, 突然変異率 0.05, 200 世代まで, 10 回ずつの試行を行なった。

(4) NSKP, NMKP, NMCKP 問題の設定

NSKP, NMKP, NMCKP については, 相関係数 $\alpha_{ij}\in[0,0.99]$ をランダムに生成する。他の設定はそれぞれ SKP, MKP, MCKP と同様に設定する。

3.2 解の性質の検討

GA の方法は近似法であるが, 解の探索能力を以下の実験で分析する。

(1) 厳密解との比較

問題の規模が小さい場合は, 厳密解を分枝限定 (BB) 法や総当り法で容易に求めることができる。小さい問題に対して GA の探索能力を検討するために, 厳密解との比較をする。

SKP において, 品物数が 10,20,30 に対して, 1 回の試行で, 最も優秀解をその試行で得られた解とする。よって, 10 回の試行により 10 個の解が得られる。その 10 個の解の中で, 最良解と最悪解および厳密解が得られる回数を表 1に示す。この厳密解は分枝限定 (BB) 法で求めた。SKP では, 10 個品物の場合は, 10 回探索した最適解は全部厳密解である。20 と 30 の場合は, 10 回探索した最適解は厳密解が全部でなく, 2 回は局所解に陥った。

表 1: SKP の厳密解との比較

荷物の数	厳密解	最良解	最悪解	厳密解回数
10	1656	1656	1656	10
20	3407	3407	3384	8
30	5232	5232	5134	8

MCKP において, 品物数が 10,20,30,50,100 に対して, 1 回の試行で, 最も優秀解をその試行で得られた解とする。よって, 10 回の試行により 10 個の解が得られる。その 10 個の解中に, 最良解, 最悪解, 平均値, 厳密解を得られる回数を, 表 2に示す。この厳密解は総当り法で求めた。MCKP では, 10 の場合は, 10 回探索した最適解は全部厳密解である。50 と 100 の場合は, 10 回探索した最適解は 1 回だけ厳密解である。このため, 品物数が増えるにしたがって, 最適解が局所解に陥り易いことがわかる。

表 2: MCKP の厳密解との比較 (5 クラス)

荷物の数	10	20	30	50	100
厳密解	925	976	971	946	984
最良解	925	976	971	946	984
最悪解	925	962	962	927	954
平均値	925	972.3	968.8	936.3	968.8
厳密解回数	10	6	6	1	1

MKP と NMKP, NMCKP において, 品物数が 10 個に対して 1 回の試行で, 最も優秀解をその試行で得られた解とする。よって, 10 回の試行により 10 個の解が得られる。その 10 個の解中に, 最良解, 最悪解, 厳密解を得られる回数を, 表 3に示す。この厳密解は総当り法で求めた。

表 3: NSKP, MKP, NMKP, NMCKP の厳密解との比較

問題	厳密解	最良解	最悪解	厳密解回数
MKP	554	554	554	10
NSKP	6306.42	6306.42	6306.42	10
NMKP	967.39	967.39	861.63	9
NMCKP	2158.34	2158.34	2043.67	9

表3より，10の場合は，MKPとNSKPでは10回探索した最適解はすべて厳密解であった。NMKPとNMCKPでは10回の探索のうちは9回厳密解を得た。

(2) 最適解との比較

問題の規模が大きくなると，ほかの方法で厳密解を求めることが困難になる。大きい問題に対してGAの探索能力を検討するために，GAで世代数500まで求めた最適解を用いて，各問題と比較する。GAパラメタや実験方法は(1)と同様にする。

SKPにおいて，品物数が50,100に対して，10回の試行結果を表4に示す。NSKPにおいて，品物数が20,30に対して，10回の試行結果を表5に示す。MKPにおいて，品物数が20,30,50に対して，10回の試行結果を表6に示す。NMKPにおいて，品物数が20,30,50に対して，10回の試行結果を表7に示す。NMCKPにおいて，品物数が20,30,50,100に対して，10回の試行結果を表8に示す。

表 4: SKP の最適解との比較

荷物の数	最適解	最良解	最悪解	最適解回数
50	8663	8501	8191	0
100	17025	16612	16024	0

表 5: NSKP の最適解との比較

荷物の数	最適解	最良解	最悪解	最適解回数
20	23999.31	23999.31	ない	10
30	52733.82	52733.82	51969.40	9
50	105307.87	103094.55	98696.92	0
100	230192.86	226560.52	201658.44	0

表 6: MKP の最適解との比較 (5 個クラス)

荷物の数	最適解	最良解	最悪解	最適解回数
20	867	867	855	0
30	1163	1152	1082	0
50	1474	1403	1314	0

表 7: NMKP の最適解との比較 (5 個クラス)

荷物の数	最適解	最良解	最悪解	最適解回数
20	1695.43	1582.39	1425.88	0
30	2648.74	2596.88	2261.80	0
50	3890.34	3509.99	3086.72	0

(3) エリートの挙動

本実験では，各ナップザック問題は遺伝子の進化特性を分析するために，問題の規模を小さい場合と大きい場合とに分けて行なった。小さい問題は各問題の品物数を10個とし，大きい問題は各問題の品物

表 8: NMCKP の最適解との比較 (5 個クラス)

荷物の数	最適解	最良解	最悪解	最適解回数
20	2418.42	2418.42	2232.95	5
30	2393.08	2393.08	2160.80	3
50	2397.93	2388.07	2117.78	0
100	2598.44	2540.30	2216.49	0

数を 30 個とする。

結果を図 1に示す。図の中には各実験の GA のパラメータを示してある。$G = (N_p, N_g, P_m)$ において，N_pは集団サイズ，N_gは終了世代数，P_mは突然変異率である。

SKP と NSKP においては，10 回実行して，各世代エリートの 10 回の平均値を取ってその挙動を，小さい問題は図 1の (1) と (2) に，大きい問題は図 2の (1) と (2) に示した。MKP と NMKP においては，小さい問題に対してはナップザック数を $K = 3$ とし，大きい問題に対しては $K = 5$ とした。10 回実行して，各世代エリートの 10 回の平均値を取って，小さい問題は図 1の (3) と (4) に示し，大きい問題は図 2の (3) と (4) に示す。MCKP と NMCKP においては，小さい問題と大きい問題はクラス数を $m = 5$ とし，10 回実行して，各世代におけるエリートの 10 回の平均値を取ってその挙動を，小さい問題は図 1の (5) と (6) に示し，大きい問題は図 2の (5) と (6) に示す。

3.3 解の収束性の検討

GA では，交叉と選択によって, 評価の高い個体と類似の個体を集団中に広げることで, 集団一様性が強調される。しかし, 一様性が強くなると探索空間が小さくなり, 部分的な最適解, 局所解に陥りやすくなる。突然変異を導入することは, 遺伝子集団の多様性を維持する働きをする。多様性が強くなり, 探索の大域性が保たれる。しかし, 過度の多様性はランダムサーチに近くなるため高速な収束の妨げとなる。このため, 集団の多様性と一様性をうまく整合することは GA 探索には重要である。以下はナップザック問題の各問題に対して，多様性と一様性で解の収束性を考察する。

本研究では，集団個体の多様性と一様性の評価指標として，個体の遺伝子の差異を表わす個体間距離を導入し，その総和 Sを用いる。今，2 つの個体を $a = (a_1 a_2 \cdots a_n), b = (b_1 b_2 \cdots b_n)$, $a_i, b_i \in [0,1]$ とするとき，a と b の距離 $d(a,b)$ を a,b 間のハミング距離として定義する。

$$d(a,b) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \tag{18}$$

MCKP, NMCKP では多値コーディングを用いているが, それに対しては距離 $d(a,b)$ は次のように定義している。

$$d(a,b) = \| a - b \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2} \tag{19}$$

この距離の定義は品物の番号付けに依存した方法で, 直観的な意味での類似度を反映しにくい。計算が簡単であること, ある種の類似度を表していると思われること, により採用した。

集団個体の距離総和 Sは，個体集団を $x_i, i = 1, \cdots, n$ として，次のように定義する。

$$S = \sum_{1 \le i \ne j \le n} d(x_i, x_j) \tag{20}$$

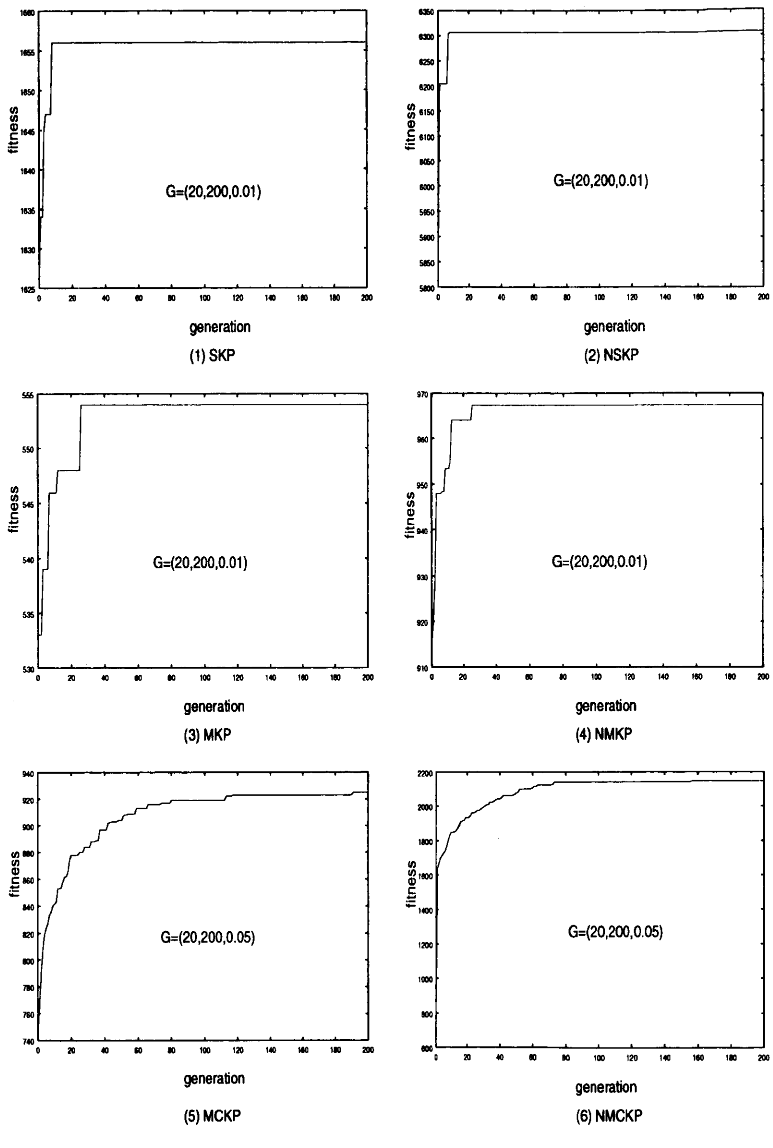

図 1: 6 種類のナップザック問題 (10 個品物) でのエリートの世代変化

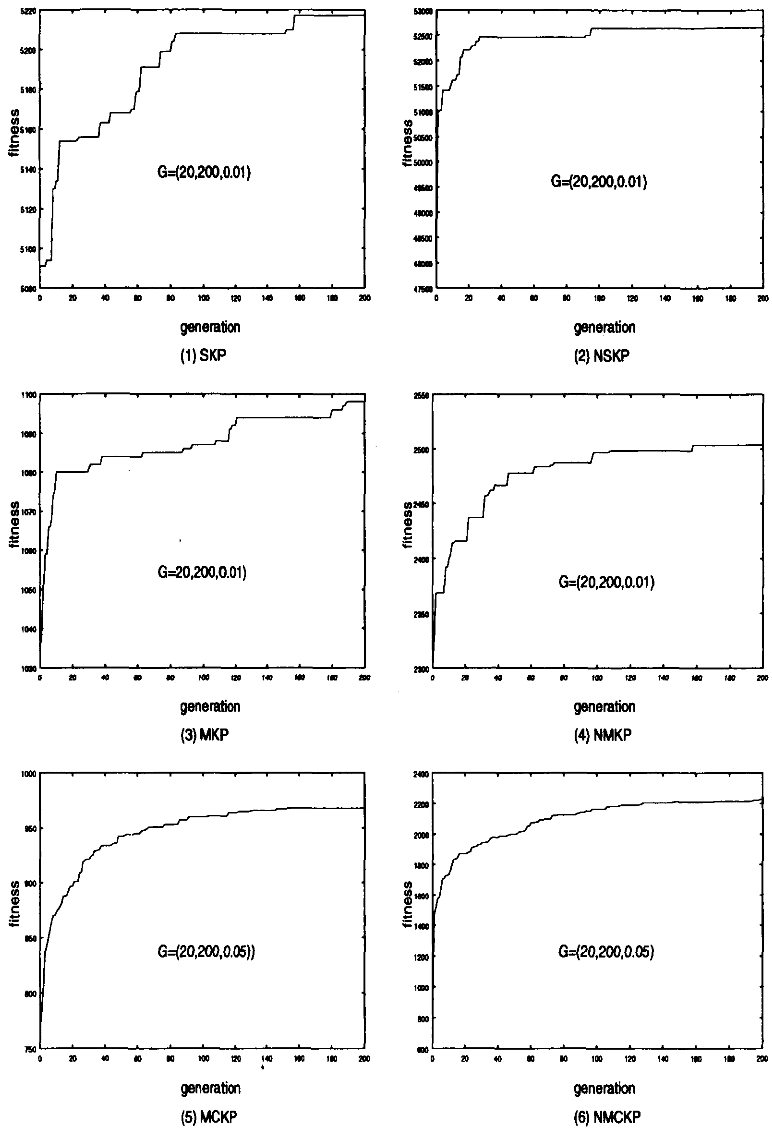

図 2: 6 種類のナップザック問題 (30 個品物) でのエリートの世代変化

Sが大きいと，集団中の個体間の距離が大きく，GA の探索点は広くなり，個体間の相似性が弱く，多様性が表わされている。逆の場合には，個体間の相似性が強くなり，一様性が表わされている。集団個体の多様性と一様性を易く表るために，集団個体を個体の適応度の順に，上位 1/3 部分と下位 1/3 の部分に分け，集団個体の多様性と一様性を考察する。以下は，6 種類のナップザック問題を小さいと大きい問題に分けて，Sの変化を考察する。点線は集団の下位 1/3 の個体の Sを表し，実線は上位 1/3 の個体の Sを表す。

10 個品物の小さい問題に対して Sの変化を図 3に示し，大きい問題に対して Sの変化を図 4に示す。

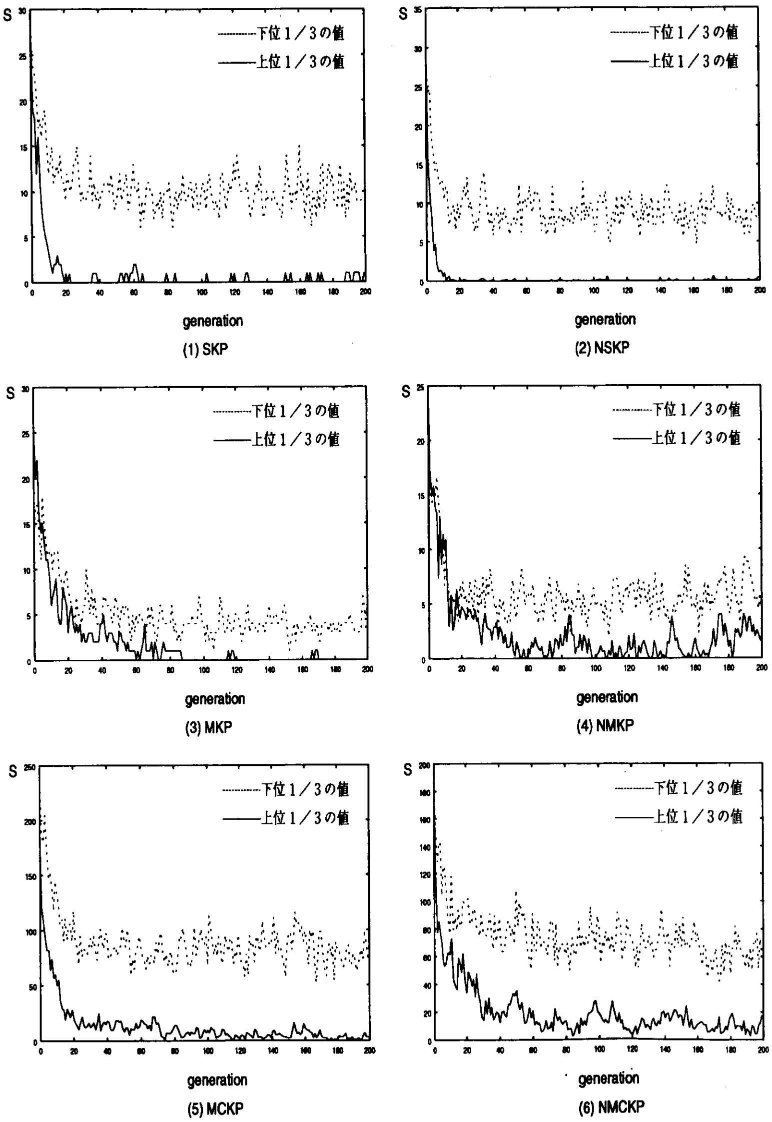

図 3: 6 種類ナップザック問題 (10 個品物) の距離の S の世代変化

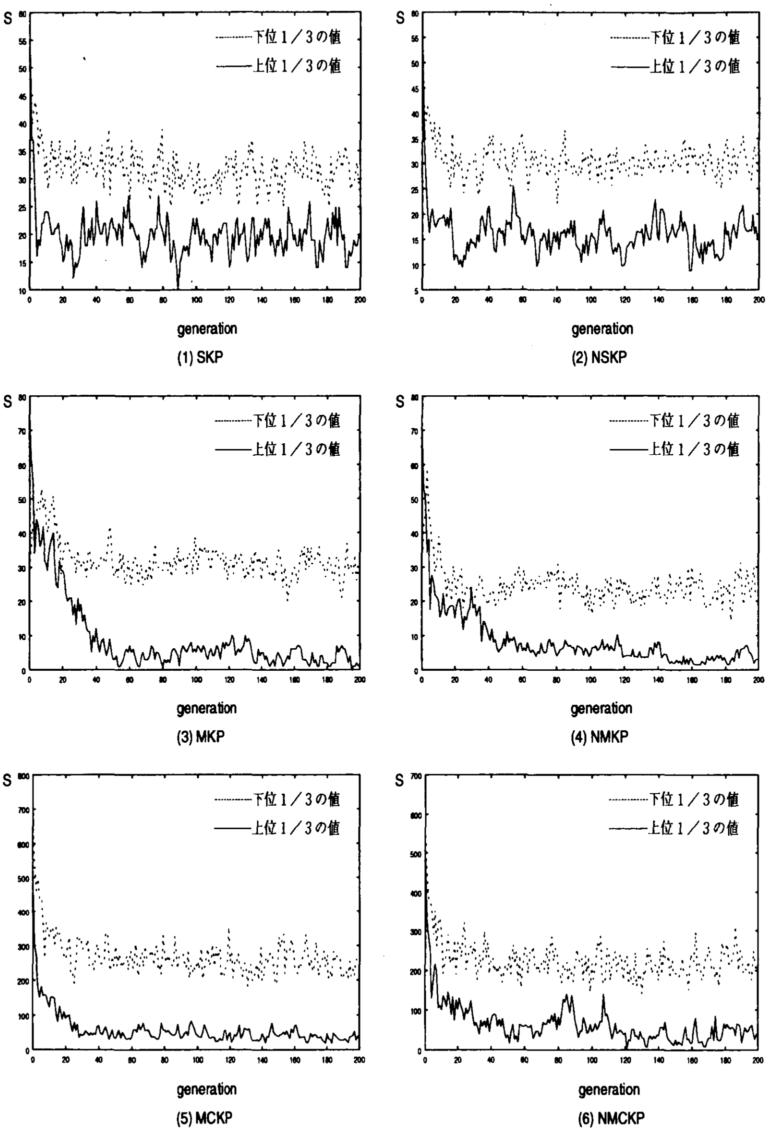

図 4: 6 種類ナップザック問題 (30 個品物) の距離の S の世代変化

4 考察とまとめ

3章の実験結果から，ナップザック問題における GA の特性を考察する。

表1～表3からわかるように，品物が10個の場合には，SKP, MCKP, MKP, NSKP では，10回の探索で得られた最適解はすべて厳密解と一致した。NMKP と NMCKP では，10回の探索において9回厳密解を得た。各ナップザック問題とも，品物数が増えるに従って，200世代で厳密解を得られる場合の回数が限られるとともに，得られた最適解が局所解に陥る可能性が増加する。表1に示すように，SKP において品物が20個及び30個の場合，10回の探索のうち8回厳密解を得た。また，表2に示すように，MCKP において品物が20個及び30個の場合，10回の探索のうち6回厳密解を得ることができた。品物が10個の場合についてのエリートの世代変化を示す図1を見ると，SKP, NSKP, MKP 及び NMKP では，エリートは50世代前後で厳密解に到達している。MCKP と NMCKP ではエリートは200世代までに厳密解に到達できた。2.1における定式化から分かるように，それぞれの問題にはそれぞれ異なる構造があり，それぞれの解空間がある。以上のように，厳密解との比較およびエリートの世代変化から，問題の規模が小さい場合には，GA はナップザック問題に対して十分な探索能力を有していると考えられる。また，問題の規模が小さい場合，GA の探索は，問題の構造や解空間の形状に影響を受けにくい，すなわち解空間の形状への依存性が比較的少ないといえる。

問題の規模が大きい場合には，表4から表8における最適解との比較から分かるように，200世代までに厳密解が探索できる回数は極めて限られる。たとえば，SKP, NSKP, NMCKP では，品物が50個以上の場合，10回の探索における最適解はすべて局所解であった。これは MKP や NMKP における品物20個以上の場合も同様である。エリートの世代変化を示す図2から分かるように，問題の規模が大きい場合には打ち切り世代である200世代においてもエリートは進化を続けている途中である可能性があり，したがって200世代における最適解は局所解である可能性が高い。SKP と NSKP では，問題の規模が大きくても最適解が探索できた。こうしたことは，問題の規模が大きくなると解空間が非常に大きくなり，探索の世代数が限られているために最適解を見落としやすくなるからである。

各問題のエリートの世代変化図を見ると，初期世代では迅速に進化が進むが，大域的な最適解に到達するまでには長い時間を必要とする場合が多い。打ち切り世代をさらに延ばすことで，より高い精度の最適解を求めることができる。GA は確率的近似解法であるため，大域最適解に到達するまでの世代数は，GA パラメータや乱数の種によって異なり，一定の分散性がある。3章における実験結果は一定のパラメータと異なる乱数の種で得られた結果であるため，パラメータが変われば，より良い結果が得られる可能性もある。

GA 探索の収束特性を表す図3及び図4から分かるように，適応度の高い上位1/3の集合のS値は，適応度の低い下位1/3の集合のS値より小さくなっている。これは，ルーレット選択戦略を用いているために，適応度の高い個体は類似性が高くなり，逆に，適応度の低い個体は類似性が低くなるためである。図3から分かるように，問題の規模が小さいときには，適応度の高い上位1/3の集合の近似度は20世代から60世代程度で小さくなり，一様性が高くなることが示された。逆に低い適応度の個体集合では一定の程度の多様性が保たれている。SKP と NSKP では，高い適応度の個体集合におけるS値は速く零になった。これは，解空間が小さいので，最適解を速く探索できたためである。MKP と NMKP, 及び MCKP と NMCKP では，それぞれ高い適応度の個体の一様性は，線型問題の方が強い。各問題における線形問題と非線型問題の特性を比較すると，その傾向は良く似ている。問題の規模が大きい場合には，各問題において一定の程度の一様性と多様性が保たれている。また，問題の規模が大きい場合にも，各問題における線形問題と非線型問題の特性は，傾向が類似している。したがって，GA の収束の特徴の一つとして，問題の大小に関わらず，高い適応度の個体は一様性が強く，低い適応度の個体は多様性が強いことが分かる。

多様性と一様性に大きな影響を与えるのは突然変異である。異なる突然変異率に対して，各問題における多様性や一様性がそれぞれ異なる。突然変異率が小さすぎると，個体間の差異が小さくなり，個体集団の一様性が強くなる。GA の探索空間の広さは個体集団の多様性に依存するので，一様性が強くな

るとGAの探索範囲が狭くなる。しかし，突然変異率が大きすぎると，多様性が極度に強くなり，GAのランダム性が強く発揮されるようになる。このため，変異率が大きすぎると，前世代の継承特質が破壊され，探索能力が低下する。こうしたことから，個体集団の中での多様性と一様性のバランスは重要である。最適な突然変異率を理論的に導くことは困難であり，経験的に決定する必要がある。突然変異率は，問題の種類や規模に対して，集団サイズや交叉率などと共に総合的に考える必要がある。

本研究では，6種類のナップザック問題に対するGAの特性を検討した。問題の規模が小さい場合には厳密解を評価の指標とし，規模が大きい場合には最適解との比較を行った。GAは，解空間が小さい場合には一定の探索世代までに厳密解を求めることができる。解空間が大きくなるにともなって，探索により長い時間が必要になる場合がある。この場合は，探索世代を増やせばよりより解が探索できる。GAでは，さまざまなナップザック問題に対して，探索空間の形状への依存性が比較的小さい。どの問題に対しても，高い適応度の個体集団では一様性が強く，低い適応度の個体集団では多様性が強い。このため，組み合わせ最適化問題において極めて大きな作業領域と計算時間を要する場合や，非線型ナップザック問題のように他の方法では最適解を求めるのが困難な場合には，GAは有効な方法である。

今後の課題として，一様性や多様性に対する最適解への収束の関係を表現する指標の検討が挙げられる。すなわち，最適解への収束をより短時間に行うためには，一様性や多様性がどのようであればよいかを定量的に評価するような指標を導入する必要がある。また，GAパラメータである集団サイズ，交叉率，突然変異率がGAの挙動に与える影響を検討し，GAパラメータの最適化を行う必要がある。

参考文献

[1] 仲川勇二，岩崎彰典，“多重選択ナップサック問題の高速厳密解法” 信学論(A)，Vol.J75-A，no.11，pp.1752-1754，Nov. 1992.

[2] P.Sinha and A.A.Zoltners，“The Multiple-Choice Knapsa ck Problem”，Operations Research，Vol.27，No.3，May-June 1979，pp.503-614.

[3] R.D.Armstrong and D.S.Kung，“A computational study of Multiple-Choice Knapsack algorithm”，ACM Transactions on Mathematical Software，Vol.9，No.2，June 1983，pp.184-198.

[4] M.E.Dyer and N.Kayal “A branch and bound algorithm for solving the multiple-choice knapsack problem”，Journal of Computation and Applied Mathematics，No.11，1984，pp231-249

[5] 謝孟春 “問題解決手法としての遺伝的アルゴリズムの性質と特徴”，福井大学博士論文，1997

[6] 坂和正敏 “遺伝的アルゴリズム”，朝倉書店，1995

[7] 北野宏明 “遺伝的アルゴリズム”、産業図書、1993